

## เฉลยโจทย์ โครงการเพิ่มพูนศักยภาพทางคณิตศาสตร์เพื่อการแข่งขัน

ข้อ 7 ตอบ 127

$$\text{ให้ } n = \overline{ab} = 10a + b$$

$$n = 2P(n) + S(n)$$

$$10a + b = 2(a + b) + ab$$

$$10a + b = 2a + 2b + ab$$

$$8a - b - ab = 0$$

$$a(8 - b) + (8 - b) = 8$$

$$(a + 1)(8 - b) = 8$$

a+1	8-b	a	b	n
1	8	0	0	00 ✗
2	4	1	4	14 ✓
4	2	3	6	36 ✓
8	1	7	7	77 ✓

$$\begin{aligned} \therefore \text{ผลบวกของ } n \text{ ที่เป็นไปได้} \\ = 14 + 36 + 77 = 127 \end{aligned}$$

ข้อ 9 ตอบ 26

$$3^{x-1} \cdot 9^{\frac{3}{2x^2}} = 27$$

$$3^{x-1} \cdot (3^2)^{\frac{3}{2x^2}} = 3^3$$

$$3^{x-1} \cdot 3^{\frac{3}{x^2}} = 3^3$$

$$3^{x-1+\frac{3}{x^2}} = 3^3$$

$$x-1+\frac{3}{x^2} = 3$$

$$x-4+\frac{3}{x^2} = 0$$

$$x^3-4x^2+3 = 0$$

แทน  $x = 1$  แล้วสมการเป็นจริง ดังนั้น  $x-1$  เป็นตัวประกอบของ  $x^3-4x^2+3$

$$1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ \hline 1 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right.$$

จะได้ว่า  $x^3-4x^2+3 = 0$  แยกตัวประกอบได้เป็น

$$(x-1)(x^2-3x-3) = 0$$

$\therefore x > 1$  ดังนั้น  $x-1 \neq 0$  แน่ๆ แสดงว่า  $x^2-3x-3 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} \approx 4.กกว่าๆ$$

$$x = \frac{3 \pm 4.กกว่าๆ}{2} = \frac{-1.กกว่าๆ}{2}, \frac{7.กกว่าๆ}{2}$$

จาก  $x > 1 \therefore x = \frac{7.กกว่าๆ}{2} = 3.กกว่าๆ$

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor 3.กกว่าๆ \rfloor = 3$$

$$\therefore 3\lfloor x \rfloor^2 - 1 = 3 \cdot 3^2 - 1 = 26$$

**ข้อ 11 ตอบ 777**

จาก  $P(1) = 15$  ,  $P(2) = 22$  ,  $P(3) = 29$  ,  $P(4) = 36$  ,  $P(5) = 43$  ,  $P(6) = 50$

พิจารณา  $15, 22, 29, 36, 43, 50, \dots$  ดังนั้นรูปทั่วไปคือ  $\boxed{7x+8}$

$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & & \\ & +7 & +7 & +7 & & & \\ & \searrow & \searrow & \searrow & & & \end{array}$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) + (7x+8)$$

$$\therefore P(7) = (6)(5)(4)(3)(2)(1) + 7(7) + 8 = 777$$

**ข้อ 13 ตอบ 4**

สมมุติปัจจุบัน ลูก อายุ  $x$  ปี จะได้ว่า

	T ปีก่อน	ปัจจุบัน	T ปีข้างหน้า
อายุลูก	$x - T$	$x$	$x + T$
อายุพ่อ + แม่	$14x - 2T$	$14x$	$14x + 2T$

**T ปีก่อน** สมการคือ  $14x - 2T = 26(x - T)$

$$14x - 2T = 26x - 26T$$

$$\boxed{x = 2T}$$

**T ปีข้างหน้า**

$$\frac{\text{อายุพ่อ + แม่}}{\text{อายุลูก}} = \frac{14x + 2T}{x + T} = \frac{14(2T) + 2T}{2T + T}$$

$$= \frac{30T}{3T} = 10$$

**ข้อ 14 ตอบ 4**

กราฟสัมผัสกัน แปลว่า เกิด 1 จุดตัด  $\rightarrow$  แก่สมการจะมี 1 คำตอบ

กรณี 1  $y = ax$  —(1)

$y = 20x^2 + 18x + 5$  —(2)

จะได้  $20x^2 + 18x + 5 = ax$

$20x^2 + (18-a)x + 5 = 0$

จะมี 1 คำตอบ เมื่อ  $(18-a)^2 - 4(20)(5) = 0$

$(a-18)^2 = 20^2$

$a-18 = 20, -20$   $\therefore a = 38, -2$

กรณี 2  $y = bx$  กับ  $y = 20x^2 + 18x + 5$

จะแก้ได้เช่นเดียวกับ กรณี 1 คือ  $b = 38, -2$

โจทย์กำหนด  $a > b$   $\therefore a = 38, b = -2$

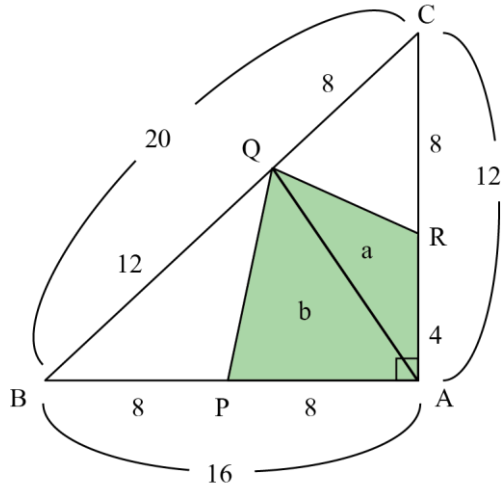
เมื่อนำไปแทนแล้วพบว่า ตัวเลือกข้อ 4 เป็นจริง

**ข้อ 15 ตอบ 1**

จาก  $\cos A + \cos^2 A = 1$   $\left\{ \begin{array}{l} \cos A = 1 - \cos^2 A \\ \cos A = \sin^2 A \text{ —(1)} \\ \cos^2 A = 1 - \cos A \text{ —(2)} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} \therefore 5\sin^{12} A + 8\sin^{10} A &= 5(\sin^2 A)^6 + 8(\sin^2 A)^5 \\ &= 5\cos^6 A + 8\cos^5 A = \cos^4 A(5\cos^2 A + 8\cos A) \\ &= (1 - \cos A)^2 [5(1 - \cos A) + 8\cos A] \\ &= (1 - 2\cos A + \cos^2 A)(5 + 3\cos A) \\ &= (1 - 2\cos A + 1 - \cos A)(5 + 3\cos A) \\ &= (2 - 3\cos A)(5 + 3\cos A) = 10 - 9\cos A - 9\cos^2 A \\ &= 10 - 9(\cos A + \cos^2 A) = 10 - 9(1) = 1 \end{aligned}$$

ข้อ 17 ตอบ 41.60



จากพีทาโกรัสจะได้  $AC = 12$  หน่วย

$$[\Delta ABC] = \frac{1}{2}(12)(16) = 96 = x$$

จะได้ว่า  $a = \frac{4}{12}[\Delta ACQ]$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{8}{20}[\Delta ABC]\right)$$

$$a = \frac{2}{15}x$$

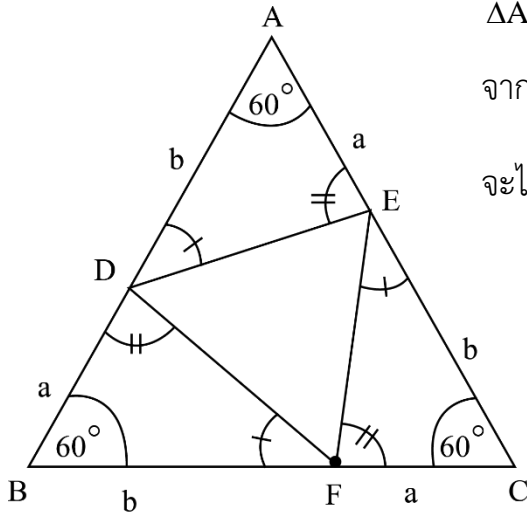
และ  $b = \frac{1}{2}[\Delta AQB]$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{12}{20}[\Delta ABC]\right)$$

$$b = \frac{3}{10}x$$

$$\begin{aligned} \therefore a+b &= \frac{2}{15}x + \frac{3}{10}x = \frac{13}{30}x = \frac{13}{30}(96) \\ &= 41.60 \end{aligned}$$

ข้อ 19 ตอบ  $5-2\sqrt{6}$



$$\triangle ADE \cong \triangle CDF \cong \triangle BEF$$

จากโจทย์  $[\triangle DEF] = \frac{3}{4}[\triangle ABC]$

จะได้  $[\triangle DCF] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}[\triangle ABC]\right)$

$$\frac{1}{2}ab \sin 60^\circ = \frac{1}{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)^2\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}ab = \frac{1}{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)^2\right)$$

$$12ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 - 10ab + b^2 = 0$$

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{10ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{0}{b^2}$$

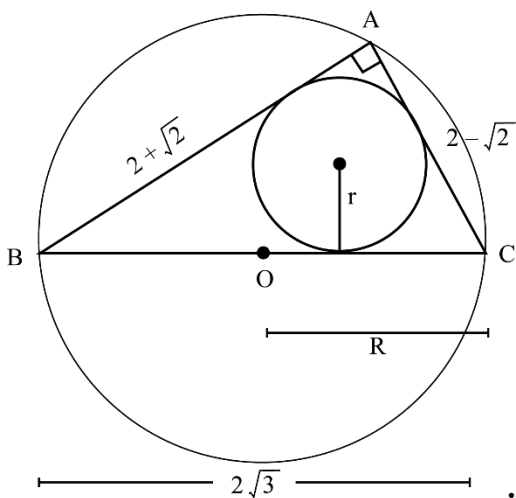
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 10\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4}}{2} = 5 \pm \sqrt{24}$$

$\therefore \frac{a}{b} = 5 - 2\sqrt{6}$ ,  $5 + 2\sqrt{6}$  ใช้ไม่ได้ เพราะโจทย์บอก  $a < b$

ข้อ 20 ตอบ 4

$$\therefore (2+\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2$$



$\therefore \triangle ABC$  เป็น  $\triangle$  มุมฉาก

จากรูป  $R = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$  หน่วย

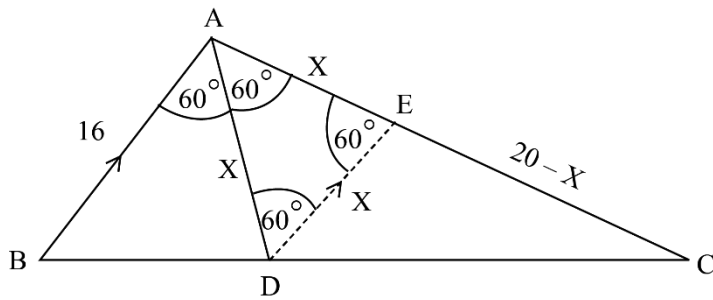
$$r = \frac{2(\text{พ.ท. } \triangle ABC)}{\text{เส้นรอบรูป } \triangle ABC}$$

$$r = \frac{2\left(\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})\right)}{(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})+2\sqrt{3}} = \frac{4-2}{4+2\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\therefore \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{3}(2+\sqrt{3}) = 3+2\sqrt{3}$$

**ข้อ 21 ตอบ 2**



จาก  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

สมมติ  $AD = x$

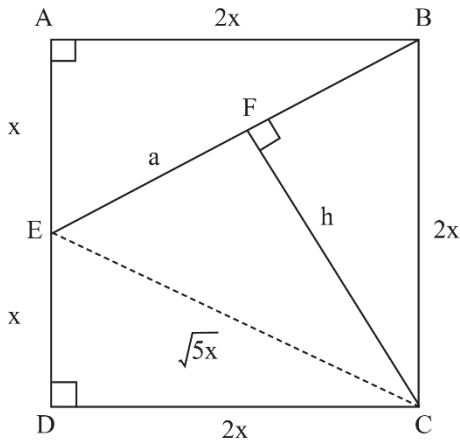
จะได้  $\triangle ADE$  เป็น  $\triangle$  ด้านเท่า

$\triangle CED \sim \triangle CAB$

$$\frac{x}{16} = \frac{20-x}{20}$$

$$\therefore x = \frac{80}{9}$$

**ข้อ 22 ตอบ 100**



สมมติ  $AB = 2x$ ,  $EF = a$ ,  $CF = h$

$$EC = AB = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5x}$$

$$[\triangle BEC] = \frac{1}{2}(\sqrt{5x})h = \frac{1}{2}(2x)(2x)$$

$$\therefore h = \frac{4x}{\sqrt{5}}$$

จาก  $\triangle CEF$ ,  $a^2 = (\sqrt{5x})^2 - h^2$

$$a^2 = 5x^2 - \left(\frac{4x}{\sqrt{5}}\right)^2 = 5x^2 - \frac{16x^2}{5}$$

$$a^2 = \frac{9}{5}x^2 \rightarrow \therefore a = \frac{3}{\sqrt{5}}x$$

จาก  $[\square DEFC] = [\triangle DEC] + [\triangle EFC]$

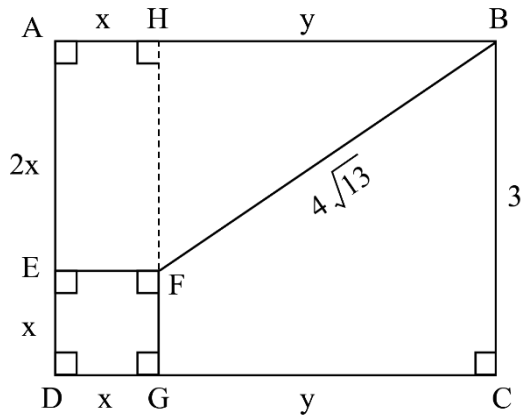
$$55 = \frac{1}{2}(x)(2x) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x\right)\left(\frac{4}{\sqrt{5}}x\right)$$

$$55 = x^2 + \frac{6}{5}x^2$$

$$x^2 = 25$$

$\therefore [\square ABCD] = 4x^2 = 4(25) = 100$  ตารางหน่วย

**ข้อ 23** ตอบ 56



สมมุติ  $DE = x$  ,  $AE = 2x$  ,  $BH = y$

พ.ท.  $\square BAEF = 80$

$$\frac{1}{2}(2x+y)(2x) = 80$$

$$\boxed{y = \frac{80}{x} - 2x} \quad \text{--- (1)}$$

จาก  $\triangle BHF$  ,  $(2x)^2 + y^2 = (4\sqrt{13})^2$

$$4x^2 + \left(\frac{80}{x} - 2x\right)^2 = 16(13)$$

$$4x^2 + \frac{6400}{x^2} - 320 + 4x^2 = 16(13)$$

$$\frac{800}{x^2} - 40 + x^2 = 26$$

$$x^4 - 66x^2 + 800 = 0$$

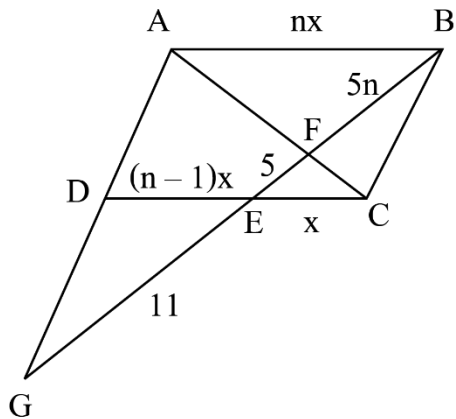
$$(x^2 - 16)(x^2 - 50) = 0$$

$x^2 = 16$ , 50 ใช้ไม่ได้ เพราะ  $x$  ต้องเป็น

$\therefore x = 4$  , แทนใน (1) ได้  $y = 12$  จำนวนตรรกยะ

$\therefore$  ความยาวรอบรูป  $\square ABCD = 56$

**ข้อ 24** ตอบ 16



สมมุติ  $EC = x$  ,  $AB = n(x)$

$$\triangle ABF \sim \triangle CEF \quad \therefore BF = 5n$$

$$\triangle GDE \sim \triangle BCE$$

$$\frac{(n-1)x}{x} = \frac{11}{5+5n}$$

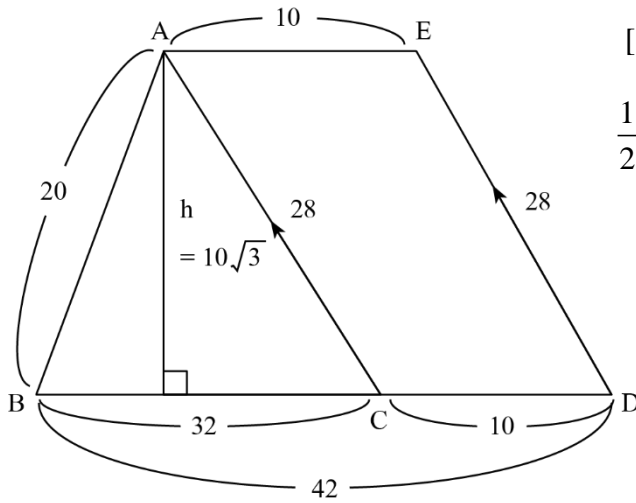
$$(n-1)(5)(n+1) = 11$$

$$n^2 - 1 = \frac{11}{5}$$

$$\therefore 5n^2 = 16$$



ข้อ 25 ตอบ  $260\sqrt{3}$  ตารางหน่วย



$$s = \frac{20+28+32}{2} = 40$$

$$[\Delta ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{1}{2}(32)(h) = \sqrt{40(20)(12)(8)}$$

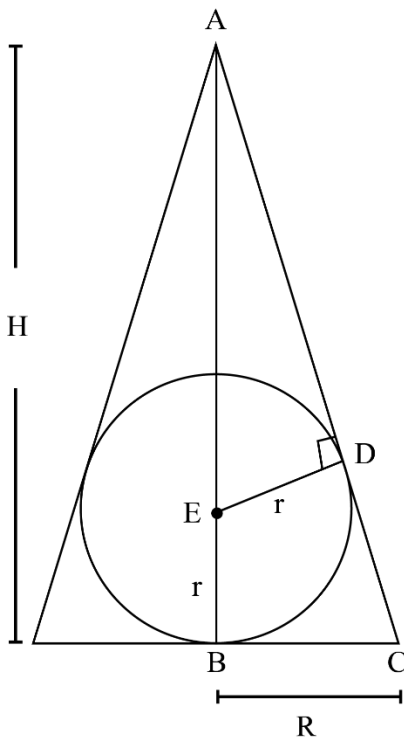
$$16h = 160\sqrt{3}$$

$$h = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore [\square ABDE] = \frac{1}{2}(10\sqrt{3})(10+42)$$

$$= 260\sqrt{3} \text{ ตารางหน่วย}$$

ข้อ 27 ตอบ 3



$$\text{จาก } \frac{r}{R} = \frac{3}{5} \rightarrow R = \frac{5}{3}r$$

$$AC = \sqrt{R^2 + H^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}r\right)^2 + H^2}$$

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC \rightarrow \frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{H-r}{AC}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{H-r}{\sqrt{\frac{25}{9}r^2 + H^2}}$$

$$\frac{25}{9}r^2 + H^2 = \frac{25}{9}(H-r)^2$$

$$\frac{25}{9}r^2 + H^2 = \frac{25}{9}H^2 - \frac{25}{9}(2Hr) + \frac{25}{9}r^2$$

$$\frac{50}{9}Hr = \frac{16}{9}H^2$$

$$\therefore \frac{r}{H} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$$

\*\*\*\*\*