

ติว PAT 1 และคณิตศาสตร์ 1 วิชาสามัญ
โรงเรียนขอนแก่นวิทยายน
เฉลยโจทย์ข้อที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

ข้อ 15 ตอบ 1

$$5(\sin a + \cos a) + 2 \sin a \cos a = \frac{1}{25} \rightarrow \sin^2 a + 2 \sin a \cos a + \cos^2 a + 5(\sin a + \cos a) = 1 + \frac{1}{25}$$

$$(\sin a + \cos a)^2 + 5(\sin a + \cos a) = \frac{26}{25} \rightarrow 25(\sin a + \cos a)^2 + 125(\sin a + \cos a) - 26 = 0$$

ให้ $x = \sin a + \cos a$ ดังนั้น $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$$25x^2 + 125x - 26 = 0 \rightarrow (5x - 1)(5x + 26) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{5}, \left(-\frac{26}{5}\right)$$

ใช้ไม่ได้

ดังนั้น $\sin a + \cos a = \frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} \therefore & 125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75 \sin a \cos a \\ &= 125(\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a) + 75 \sin a \cos a \\ &= 125\left(\frac{1}{5}\right)(1 - \sin a \cos a) + 75 \sin a \cos a = 25 - 25 \sin a \cos a + 75 \sin a \cos a \\ &= 25(1 + 2 \sin a \cos a) = 25(\sin^2 a + 2 \sin a \cos a + \cos^2 a) \\ &= 25(\sin a + \cos a)^2 = 25\left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

ข้อ 21 ตอบ 2

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A \rightarrow \frac{\sin 3A}{\sin A} = 3 - 4 \sin^2 A$$

$$\begin{aligned} (3 - 4 \sin^2 9^\circ)(3 - 4 \sin^2 27^\circ)(3 - 4 \sin^2 81^\circ)(3 - 4 \sin^2 243^\circ) &= \frac{\sin 27^\circ}{\sin 9^\circ} \times \frac{\sin 81^\circ}{\sin 27^\circ} \times \frac{\sin 243^\circ}{\sin 81^\circ} \times \frac{\sin 729^\circ}{\sin 243^\circ} \\ &= \frac{\sin 729^\circ}{\sin 9^\circ} = \frac{\sin 9^\circ}{\sin 9^\circ} = 1 \end{aligned}$$

ข้อ 25 ตอบ 2

$$\sin A + \sin B = 1 \rightarrow 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1 \quad \text{--- (1)}$$

$$\cos A + \cos B = \frac{3}{2} \rightarrow 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \text{ จะได้ } \tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos(A+B) = \cos 2\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{A+B}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{4}{9}}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{5}{13}$$

ข้อ 26 ตอบ 0.5

$$\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ} = \frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} + 1 - 2 \sin^2 18^\circ} = \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$$

ข้อ 27 ตอบ 4

$$\begin{aligned} \arctan\left[\frac{2 \cos(60^\circ - 50^\circ) - \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 10^\circ}\right] &= \arctan\left[\frac{2(\cos 60^\circ \cos 50^\circ + \sin 60^\circ \sin 50^\circ) - \cos 50^\circ}{2 \cos 40^\circ \sin 30^\circ}\right] \\ &= \arctan\left[\frac{\sqrt{3} \sin 50^\circ}{\sin 50^\circ}\right] = \arctan \sqrt{3} \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

ข้อ 28 ตอบ 5

$$\begin{aligned} A &= \arctan\left[\frac{2 \sin 50^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}\right] = \arctan\left[\frac{2 \sin(30^\circ + 20^\circ) - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}\right] \\ &= \arctan\left[\frac{2(\sin 30^\circ \cos 20^\circ + \cos 30^\circ \sin 20^\circ) - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}\right] = \arctan\left[\frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}\right] \end{aligned}$$

$$A = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{6} + A\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - A\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = (1) \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ข้อ 35 ตอบ 1

$$a_1 = 5, a_{50} = 103 \rightarrow a_{50} - a_1 = 98 \rightarrow 49d = 98 \rightarrow d = 2$$

$$\begin{aligned} a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{49}^2 - a_{50}^2 &= (a_1 - a_2)(a_1 + a_2)(a_3 - a_4)(a_3 + a_4) \dots (a_{49} - a_{50})(a_{49} + a_{50}) \\ &= (-d)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{49} + a_{50}) \\ &= (-2) \frac{50}{2} (a_1 + a_{50}) = -50(5 + 103) \\ &= -5,400 \end{aligned}$$

ข้อ 36 ตอบ 500

$$\frac{a_1}{a_1 + 2} = \frac{a_2}{a_2 + 3} \rightarrow a_1 a_2 + 3a_1 = a_1 a_2 + 2a_2 \rightarrow a_2 = \frac{3}{2} a_1$$

$$\frac{a_2}{a_2 + 3} = \frac{a_3}{a_3 + 4} \rightarrow a_2 a_3 + 4a_2 = a_2 a_3 + 3a_3 \rightarrow a_3 = \frac{4}{3} a_2 = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2} a_1 \right) = 2a_1$$

ลำดับชุดนี้คือ $a_1, \frac{3}{2}a_1, 2a_1, \dots, a_{1000}$ พบว่าเป็นลำดับเลขคณิต มี $d = \frac{1}{2}a_1$

$$\text{จาก } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1000} = 250,000$$

$$\frac{1000}{2} (a_1 + a_{1000}) = 250,000 \quad \therefore a_1 + a_{1000} = 500$$

ข้อ 39 ตอบ 5 : 7

$$S_n = 3n^2 + 4n \rightarrow a_n = 6n + 1$$

$$T_n = 4n^2 + 9n \rightarrow b_n = 8n + 5$$

$$\therefore \frac{a_9}{b_9} = \frac{6(9) + 1}{8(9) + 5} = \frac{55}{77} = \frac{5}{7} \rightarrow a_9 : b_9 = 5 : 7$$

ข้อ 40 ตอบ 5 : 1

$$S_n = 7n^2 + 2n \rightarrow a_n = 14n - 5$$

$$T_n = n^2 + 4n \rightarrow b_n = 2n + 3$$

$$\therefore \frac{a_5}{b_5} = \frac{14(5) - 5}{2(5) + 3} = \frac{65}{13} = \frac{5}{1} \rightarrow a_5 : b_5 = 5 : 1$$

ข้อ 41 ตอบ 3.97

$$S_n = n^2 + n \rightarrow a_n = 2n$$

$$T_n = 2n^2 - n \rightarrow b_n = 4n - 3$$

$$\therefore 2 \left(\frac{b_{100}}{a_{100}} \right) = 2 \left(\frac{4(100) - 3}{2(100)} \right) = \frac{397}{100} = 3.97$$

ข้อ 42 ตอบ 59

$$S_n = 3n^2 + 2n \rightarrow a_n = 6n - 1 \rightarrow a_{2^n} = 6(2^n) - 1$$

$$m = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_{2^2} + \frac{1}{2^3}a_{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}a_{2^{10}}$$

$$= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2^n} a_{2^n} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2^n} [6(2^n) - 1] = \sum_{n=1}^{10} \left(6 - \frac{1}{2^n} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{10} 6 - \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2^n} = 60 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \right]$$

$$m = 60 - \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 60 - 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{10} = 59 + \frac{1}{2^{10}} = 59 + \frac{1}{1024}$$

ข้อ 44 ตอบ 5,460

ขั้นที่ 1 หาจำนวนวิธีเลือกกรรมการ โดยไม่สนใจเงื่อนไขของ ก กับ ข

กรณีที่ 1 ชาย 2 , หญิง 4 ทำได้ $\binom{10}{2} \binom{7}{4} = 1,575$ วิธี

กรณีที่ 2 ชาย 3 , หญิง 3 ทำได้ $\binom{10}{3} \binom{7}{3} = 4,200$ วิธี

$$\therefore \text{รวม 2 กรณี} = 5,775 \text{ วิธี}$$

ขั้นที่ 2 หาจำนวนวิธีที่ ก และ ข เป็นกรรมการพร้อมกัน

กรณีที่ 1 ชาย 2 , หญิง 4 ทำได้ $\binom{8}{0} \binom{7}{4} = 35$

กรณีที่ 2 ชาย 3 , หญิง 3 ทำได้ $\binom{8}{1} \binom{7}{3} = 280$

$$\therefore \text{รวม 2 กรณี} = 315 \text{ วิธี}$$

$$\therefore \text{จำนวนวิธีที่ ก และ ข เป็นกรรมการพร้อมกันไม่ได้} = 5,775 - 315 = 5,460 \text{ วิธี}$$

ข้อ 48 ตอบ 5

จากโจทย์ $n(S) = 10 \times 10 \times 10 = 1,000$

ทำ $n(E)$:	<u>x</u>	<u>y, z</u>
	1	2, 3, 4, ..., 10 มี 9×9 วิธี
	2	3, 4, 5, ..., 10 มี 8×8 วิธี
	3	4, 5, 6, ..., 10 มี 7×7 วิธี
	\vdots	\vdots
	9	10 มี 1×1 วิธี

$$\therefore n(E) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 = \frac{9}{6}(9+1)(2(9)+1) = 285$$

(มาจากสูตร $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$)

$$\therefore P(E) = \frac{285}{1000}$$

ข้อ 49 ตอบ 2

$$AB = BA \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & d \\ c-a & d-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & a+b \\ -d & c+d \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{c = -b}, \boxed{d = a+b}, d = a - c$$

c	b	a	d = a+b
2	-2	0	-2
		1	-1
		2	0
1	-1	-1	-2
		0	-1
		1	0
		2	1
0	0	-2	-2
		-1	-1
		0	0
		1	1
		2	2
-1	1	-2	-1
		-1	0
		0	1
		1	2
-2	2	-2	0
		-1	1
		0	2

จะได้ $n(E) = 19$

$$n(W) = 5^4$$

$$\therefore P(E) = \frac{19}{625}$$
