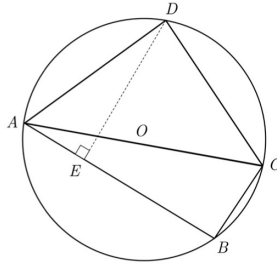
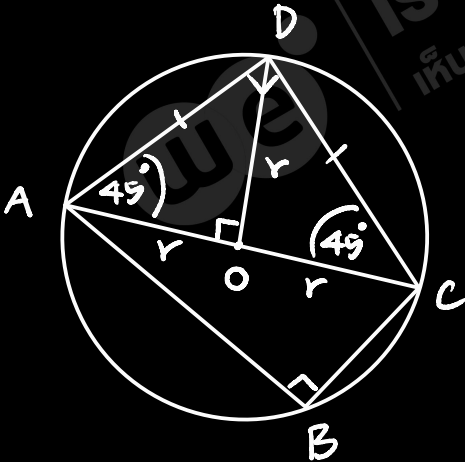


14. กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นจุดบนเส้นรอบวง โดย \overline{AC} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม ดังรูป ถ้า $AD = DC$ และสี่เหลี่ยม $ABCD$ มีพื้นที่เท่ากับ 20 ตารางหน่วย แล้ว \overline{DE} ยาวเท่ากับเท่าใด

1. $2\sqrt{3}$
2. $3\sqrt{3}$
3. $2\sqrt{5}$
4. $3\sqrt{5}$
5. $4\sqrt{5}$



วิธีทำ



เมื่งรูปตามโจทย์

ให้ $r =$ รัศมีของวงกลม

$\triangle ADC \cong \triangle ABC$

แทนในวงกลม \cong คือ

ที่ AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

จึงได้ว่า

$\triangle ADC \cong \triangle ABC$

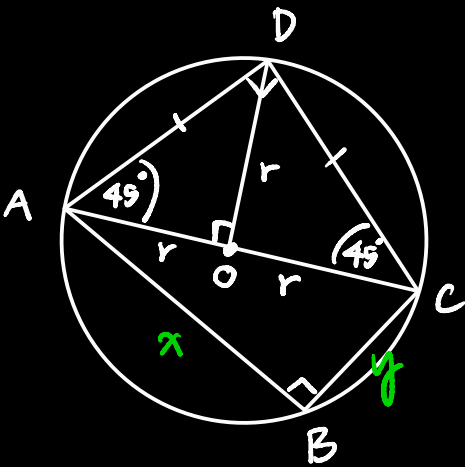
เป็น \triangle มุมฉาก

จึงได้ $\angle DAC = \angle CDA = 45^\circ$

จ: เห็นว่า $\triangle ADC$ เป็น \triangle มุมฉาก

ที่ AC เป็นฐาน \cong คือจุด O เป็นจุดกึ่งกลางฐาน

จึงได้ว่า \overline{DO} เป็นเส้นตั้งฉากฐาน



$$\text{จ.ให้ } AB = x \text{ และ } BC = y$$

$$\text{จากโจทย์ } [\square ABCD] = 20$$

$$\text{จ.ให้}$$

$$[\triangle ADC] + [\triangle ABC] = 20$$

$$\frac{1}{2}(2r)(r) + \frac{1}{2}xy = 20$$

$$r^2 + \frac{1}{2}xy = 20$$

$$2r^2 + xy = 40$$

$$\text{จ.ให้ } xy = 40 - 2r^2 \quad (1)$$

พิจารณา $\triangle ABC$ จากทฤษฎีบท

$$\text{จ.ให้ } x^2 + y^2 = (2r)^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4r^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = 4r^2$$

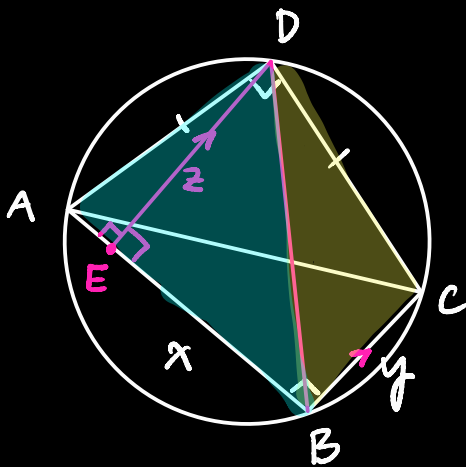
$$(x+y)^2 - 2xy = 4r^2$$

$$(x+y)^2 = 4r^2 + 2xy \quad \text{จาก (1) จ.ให้}$$

$$(x+y)^2 = 4r^2 + 2(40 - 2r^2)$$

$$(x+y)^2 = 4r^2 + 80 - 4r^2 \rightarrow (x+y)^2 = 80$$

$$\text{จ.ให้ } x+y = \sqrt{80} \rightarrow \boxed{x+y = 4\sqrt{5}} \quad **$$



ให้ $DE = 2$

จากรูป: เห็นว่า

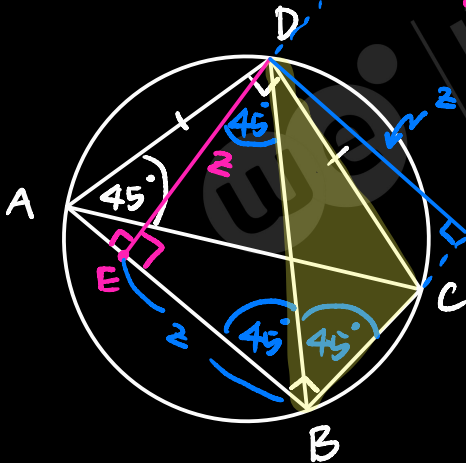
$$\widehat{DEB} + \widehat{EBC} = 180^\circ$$

แสดงว่า $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$

ลาทอนเส้น \overline{BD}

จ: เห็นว่า $[\square ABCD] = [\triangle ABD] + [\triangle BCD]$

ใน $\triangle BCD$ จ: มีสูงจรด $BC = EB$ \sim หัวมุมฉาก



จากรูปที่ตัดออกมา

$$\widehat{DBC} = \widehat{DAC} = 45^\circ$$

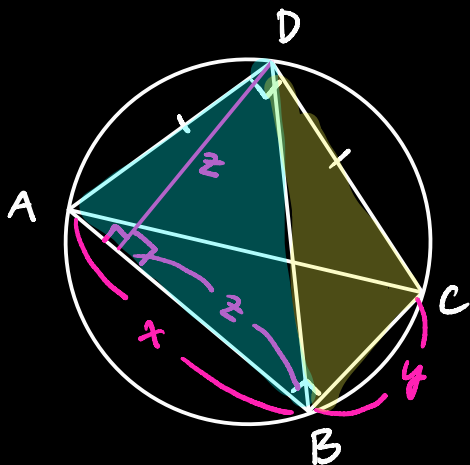
เนื่องจาก $\widehat{ABC} = 90^\circ$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{ABD} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

แค: จ: ได้ว่า $\widehat{BDE} = 45^\circ$

เนื่องจาก $\triangle BED$ เป็น \triangle หน้าจั่วที่ $\widehat{BDE} = \widehat{BDE} = 45^\circ$ $\therefore BE = ED = 2$

ซึ่ง $\triangle BCD$ มีสูงจรด $BC = 2$



ให้ $20 = [\square ABCD] = [\triangle AED] + [\triangle BEC]$

$$20 = \frac{1}{2} x z + \frac{1}{2} y z$$

$$20 = \frac{1}{2} z (x + y)$$

$$40 = z (4\sqrt{5})$$

$$z = \frac{40}{4\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$z = 2\sqrt{5}$$

$\therefore \overline{DE}$ ยาวเท่ากับ $2\sqrt{5}$

15. กำหนดให้สี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีด้าน \overline{AD} ขนาน \overline{BC}

โดยมีด้าน \overline{AD} เป็นฐาน, $AB = CD$ และ $\hat{B}AD = \hat{A}DC$

ให้ P เป็นจุดภายในสี่เหลี่ยม $ABCD$ ที่ทำให้ $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ และ \overline{PD}

เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{D}AB, \hat{A}BC, \hat{B}CD$ และ $\hat{C}DA$ ตามลำดับ

ถ้า $PA = 3$ และ $\hat{A}PD = 120^\circ$ แล้วพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $5\sqrt{3}$

2. $4\sqrt{2}$

3. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

4. $6\sqrt{3}$

5. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

วิธีทำ

ทำรูปตามโจทย์

① จากโจทย์ $\hat{B}AD = \hat{A}DC$

แสดงว่า $\hat{P}AD = \hat{P}DA$

ทำให้ $\triangle APD$ เป็น \triangle นี้แล้ว

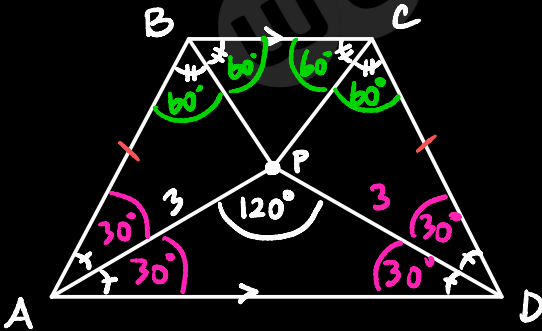
จ: ได้ $PD = 3$

$$\hat{P}DA = \hat{P}AD = 30^\circ$$

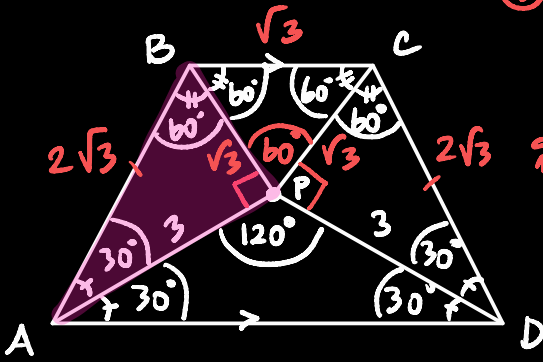
② $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ จ: ได้

$$\hat{B}CD = 120^\circ = \hat{A}BC$$

||: $\hat{P}BC = \hat{P}CB = 60^\circ$



③



จ: ใ้ได้ว่า $\widehat{BPA} = \widehat{CPD} = 90^\circ$
พิจารณารูป $\triangle BPA$

$$\frac{BP}{AP} = \tan 30^\circ$$

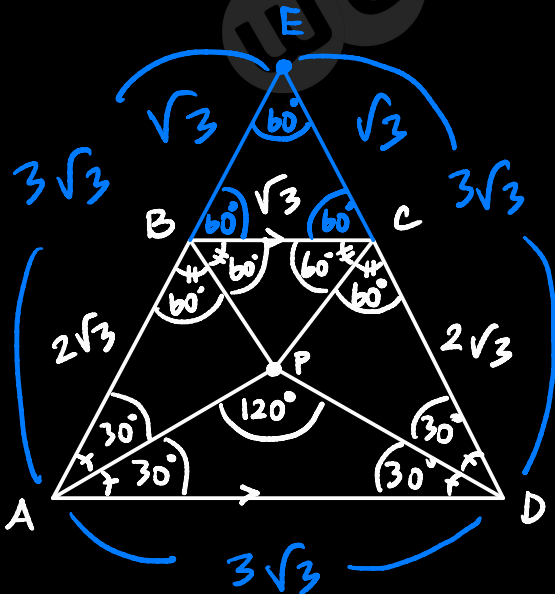
$$\frac{BP}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{BP = \sqrt{3}}$$

จากรูป $\triangle BPC$ เป็น \triangle ด้านเท่า

ดังนั้น $BC = BP = CP = \sqrt{3}$

แฉ: จากพีทาโกรัสจ: ใ้ได้ว่า $AB^2 = 3^2 + (\sqrt{3})^2$

$$AB^2 = 9 + 3 \rightarrow AB^2 = 12 \rightarrow \boxed{AB = 2\sqrt{3}}$$



④ ต่อเส้น \overline{AB}

แฉ: \overline{CD} ตัดกับที่จุด E

จ: ใ้ได้ $\widehat{CBE} = \widehat{BCE} = 60^\circ$
(เพราะมุมตรง = 180°)

แฉ: จ: ใ้ได้ว่า

$$BE = BC = CE = \sqrt{3}$$

ทำให้ $\triangle ADE$ เป็น \triangle ด้านเท่า

แฉ: ด้านยาว = $3\sqrt{3}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}[\square ABCD] &= [\triangle AED] - [\triangle BEC] \\&= \frac{\sqrt{3}}{4} (3\sqrt{3})^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3})^2 \\&= \frac{27\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \\&= 6\sqrt{3} \text{ ตารางหน่วย}\end{aligned}$$

ตอนที่ 2 แบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ ข้อละ 5 คะแนน รวม 25 คะแนน

26. ภูมิภาคซื้อลาบูนุ่มา 20 ตัว และซื้อตุ๊กตาลาบูนุ่มา 25 ตัว รวมเป็นเงินทั้งสิ้น 4,500 บาท ถ้าภูมิภาคขายตุ๊กตาลาบูนุ่มาทั้งหมดได้กำไร 15 % และขายตุ๊กตาลาบูนุ่มาทั้งหมดได้กำไร 20 % ทำให้ภูมิภาคได้กำไรรวมทั้งสิ้นคิดเป็นเงิน 750 บาท จงหาว่าภูมิภาคซื้อตุ๊กตาลาบูนุ่มาตัวละกี่บาท

ตอบ 150 บาท

วิธีทำ

	ลาบูนุ่มา	ตุ๊กตาลาบูนุ่มา
ซื้อ (ตัว)	20	25
ตัวละ (บาท)	x	y
ต้นทุน (บาท)	$20x$	$25y$
กำไร	15%	20%
คิดเป็นเงิน (บาท)	$\frac{15}{100}(20x)$	$\frac{20}{100}(25y)$

ต้นทุนคิดเป็นเงิน 4500 บาท
 จ: ได้ว่า $20x + 25y = 4500$
 $\div 5$ ผลอด, $4x + 5y = 900$ — (1)

กำไรรวมเป็นเงิน 750 บาท

$$\text{จ: ได้ } \frac{15}{100}(20x) + \frac{20}{100}(25y) = 750$$

$$3x + 5y = 750 \text{ — (2)}$$

$$(1) - (2), (4x + 5y) - (3x + 5y) = 900 - 750$$

$$x = 150$$

\therefore ลาบูนุ่มาตัวละ: 150 บาท

28. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$$3\sqrt{x-19} + 4\sqrt{y-17} = \frac{1}{2}(x+y-11)$$

จงหาค่าของ $y-x$

ตอบ 5

วิธีทำ ให้ $A = \sqrt{x-19} \rightarrow A^2 = x-19$

จะได้ $x = A^2 + 19$

ให้ $B = \sqrt{y-17} \rightarrow B^2 = y-17$

จะได้ $y = B^2 + 17$ แทนในสมการตั้งต้น

จะได้ $3A + 4B = \frac{1}{2}(A^2 + 19 + B^2 + 17 - 11)$

$$6A + 8B = A^2 + B^2 + 25$$

$$A^2 - 6A + B^2 - 8B + 25 = 0$$

$$A^2 - 6A + 3 + B^2 - 8B + 4 + 25 = 3 + 4$$

$$(A-3)^2 + (B-4)^2 + 25 = 25$$

$$(A-3)^2 + (B-4)^2 = 0$$

เนื่องจาก (จำนวนจริง)² ≥ 0 เสมอ

จึงได้ว่า $(A-3)^2 \geq 0$ และ $(B-4)^2 \geq 0$

ซึ่งสมการ $(A-3)^2 + (B-4)^2 = 0$ เป็นจริง

ก็ต่อเมื่อ $A-3 = 0$ และ $B-4 = 0$

$$\text{กรณี } A - 3 = 0 \rightarrow A = 3 \rightarrow \sqrt{x-19} = 3$$

$$x - 19 = 3^2 \rightarrow x = 9 + 19 \quad \text{จ: ได้ } x = 28$$

$$\text{กรณี } B - 4 = 0 \rightarrow B = 4 \rightarrow \sqrt{y-17} = 4$$

$$y - 17 = 4^2 \rightarrow y = 16 + 17 \quad \text{จ: ได้ } y = 33$$

$$\therefore y - x = 33 - 28 = 5$$

we | เรียนสนุก
เห็นผลจริงได้จริง

30. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ $0-9$

ถ้าความน่าจะเป็นที่ $ad - bc$ เป็นจำนวนคู่ มีค่าเท่ากับ $\frac{x}{y}$

โดยที่ ห.ร.ม. ของ x และ y เท่ากับ 1 แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ 13

วิธีทำ จำนวนคู่ = $\overset{คี่}{a} - \overset{คี่}{b}$ หรือ $\overset{คู่}{a} - \overset{คู่}{b}$

ดังนั้น $ad - bc$ เป็นจำนวนคู่

เมื่อ กรณีที่ 1 ad และ bc เป็นเลขคี่

กรณีที่ 2 ad และ bc เป็นเลขคู่

กรณีที่ 1 ad และ bc เป็นเลขคี่ เกิดเมื่อ a, b, c, d เป็นคี่ทุกตัว

จำนวนคี่ที่อยู่ในช่วง $0-9$ มี 5 จำนวน คือ 1, 3, 5, 7, 9

ดังนั้น a, b, c, d เป็นเลขคี่ได้ $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ วิธี

กรณีที่ 2 ad และ bc เป็นเลขคู่

เกิดเมื่อ a หรือ d เป็นเลขคู่ และ b หรือ c เป็นเลขคู่

* คิดหลายกรณียากๆ ไขว่แฉะนิ *

0 หลักที่สมองแบบนี้ ad จ: เป็นได้ 2 แบบ

คือ $\overset{คี่}{a} - \overset{คี่}{b}$ หรือ $\overset{คู่}{a} - \overset{คู่}{b}$ อย่างใดอย่างหนึ่ง *

แสดงว่า

$$ad \text{ ทั้งหมดที่เป็นไปได้} = \text{กรณีที่ } ad \text{ เป็นคู่} + \text{กรณีที่ } ad \text{ เป็นคี่}$$

$$\text{กรณีที่ } ad \text{ เป็นคู่} = ad \text{ ทั้งหมดที่เป็นไปได้} \\ - \text{กรณีที่ } ad \text{ เป็นคี่}$$

$$= \underbrace{10 \times 10}_{\substack{a, d \text{ เป็นไปได้ทั้ง 10 ตัว} \\ 0-9}} - \underbrace{5 \times 5}_{a, d \text{ เป็นคี่}}$$

$$= 100 - 25 = 75 = 3 \times 5^2 \text{ วิธี}$$

9. ทานอวตังวากัน

$$\text{กรณีที่ } bc \text{ เป็นคู่} = bc \text{ ทั้งหมดที่เป็นไปได้} \\ - \text{กรณี } bc \text{ เป็นคี่}$$

$$= 10 \times 10 - 5 \times 5 = 75$$

$$= 3 \times 5^2 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น กรณีที่ ทั้ง ad และ bc เป็นคู่

$$จ:ส = \text{กรณีที่ } ad \text{ เป็นคู่} \times \text{กรณีที่ } bc \text{ เป็นคู่}$$

$$= (3 \times 5^2) (3 \times 5^2) = 9 \times 5^4 \text{ วิธี}$$

ตัวนับจำนวนวิธีทั้งหมดที่ $ad - bc$ เป็นจำนวนคู่

$$= \text{กรณีที่ 1} + \text{กรณีที่ 2}$$

$$= 5^4 + 9 \times 5^4 = 1 \times 5^4 + 9 \times 5^4$$

$$= 10 \times 5^4 = n(E)$$

และ: $ad - bc$ ทั้งหมดที่เป็นเลขคู่

$$= \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\text{แต่ละตัวเป็นเลขคู่}} = 10^4 = n(S)$$

แต่ละตัวเป็นเลขคู่
ตัวนับ 0-9

$$\text{ตัวนับความน่าจะเป็น PCE) = } \frac{10 \times 5^4}{10^4} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore x + y = 5 + 8 = 13$$

\swarrow 2 x
 \searrow 2 y