

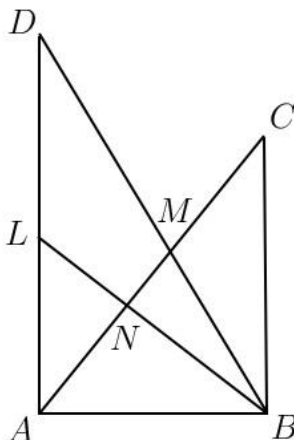
ข้อสอบรอบคัดเลือกเข้าค่าย 1 วิชาคณิตศาสตร์ สอน. ปี 2562

1. ถ้า  $a^{3n} = 5$  เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริง และ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม แล้ว  $\frac{a^{4n} + a^{7n} + a^{-5n}}{a^{-2n} + a^n}$  มีค่าเท่าใด
2. ให้  $m$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่มี ห.ร.ม. และ ค.ร.น. เป็น 20 และ 50400 ตามลำดับ จงหาค่าที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของ  $m + n$
3. จงหาผลบวกของรากจริงทั้งหมดของสมการ  $2x^2 - 10x + 7 + 4\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 31$
4. ครอบครัวหนึ่ง มีสมาชิกทั้งหมด 5 คน ประกอบด้วย พ่อ แม่ และลูกสาว 3 คน โดยที่ลูกสาว 2 คนโตเป็นฝาแฝดกัน ถ้าผลคูณของอายุของลูกสาวทั้งสามคนเท่ากับ 48 แล้วผลบวกของอายุของลูกสาวทั้งสามคนมีค่าเท่าใด (อายุคิดเป็นจำนวนเต็มปี)
5. กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่งบรรจุแนบในทรงกลมที่มีรัศมี  $r$  หน่วย ถ้ากล่องใบนี้มีพื้นที่ผิวทั้ง 6 ด้านรวมกันเท่ากับ 384 ตารางหน่วย และผลรวมของความยาวสันกล่องทั้ง 12 สัน เท่ากับ 112 หน่วย จงหาความยาวรัศมี  $r$
6. กำหนดให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม  $C$  เป็นมุมฉาก ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด  $C$  ไปตั้งฉากกับด้าน  $AB$  ที่จุด  $D$  ถ้า  $AD = 2$  และ  $BD = 3$  จงหาความยาวของ  $CD$
7. ชาวบ้านคนหนึ่งเลี้ยงหมูและเป็ดไว้ทั้งหมด 9 คอก แต่ละคอกต้องประกอบด้วยทั้งหมูและเป็ด โดยที่แต่ละคอกมีจำนวนรวมของสัตว์ทั้งสองชนิดแตกต่างกันทั้งหมด แต่มีจำนวนขารวมกัน 40 ขาเท่ากันทุกคอก หากสุ่มเลือกมาคอกหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนรวมของสัตว์คอกนั้นเป็นจำนวนเฉพาะ

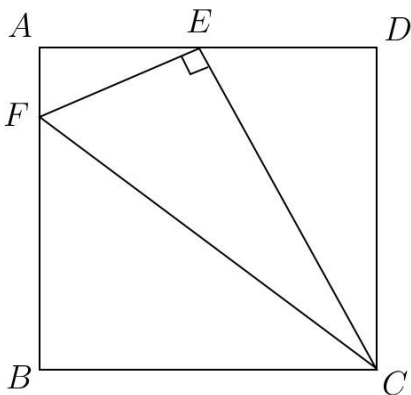
8. การแข่งขันวิ่ง 200 เมตร รายการหนึ่งมีผู้เข้าแข่งขัน 5 คน ได้แก่นักเรียน A, B, C, D และ E การแข่งขันนี้มีเงินรางวัลให้กับผู้ชนะเลิศ 7,000 บาท รางวัลที่สอง 5,000 บาท รางวัลที่สาม 2,500 บาท รางวัลที่สี่ 1,500 บาท และรางวัลที่ห้า 500 บาท เมื่อแข่งขันเสร็จ A, B และ C ให้ข้อมูลดังนี้
- นักเรียน A: คนที่ถึงก่อนผมมีไม่น้อยกว่า 2 คน แต่ผมเข้าเส้นชัยก่อนนาย D
- นักเรียน B: ผมถึงเส้นชัยตามหลังนาย E เลย
- นักเรียน C: คนที่ถึงเส้นชัยหลังผมมีเพียง 2 คนเท่านั้น
- นักเรียน A, B และ C ได้เงินรางวัลรวมกันเป็นเงินทั้งหมดกี่บาท
9. น้องมิวและน้องแบ้มแข่งเล่นเกมหมากฮอสกัน โดยในแต่ละเกม
- |                     |         |
|---------------------|---------|
| ผู้ชนะจะได้         | 4 คะแนน |
| ผู้แพ้จะได้         | 0 คะแนน |
| และถ้าเสมอจะได้คนละ | 1 คะแนน |
- จงหาว่าเมื่อเล่นกันไปจนครบ 10 เกมแล้วผลรวมของคะแนนทั้งหมดของทั้งคู่ที่มีค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ต่างจากค่าน้อยที่สุดที่เป็นไปได้อยู่เท่าใด
10. กำหนดให้  $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$  โดยที่  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ  $m, n$  เป็นจำนวนเต็ม ถ้า  $f(x)$  หารด้วย  $x-1$  แล้วเหลือเศษ 4 แต่หารด้วย  $x+3$  ลงตัว จงหาค่าของ  $mn$
11. ให้  $m$  เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่เศษเหลือจากการหาร 555 และ 670 ด้วย  $m$  มีค่าเท่ากัน คือ  $p$  ถ้า  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะบวก จงหาค่าของ  $m+p$
12. จงหาเศษจากการหาร  $\left(\left(2^{2562}3^{2019}\right)^{2020}\right)^{2563}$  ด้วย 10
13. ให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่  $a^2 + b^2 = 425$  ถ้า ท.ร.ม. ของ  $a$  และ  $b$  มีค่าเท่ากับ 5 จงหา ค.ร.น. ของ  $a$  และ  $b$

14. ให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริงที่ยังไม่ทราบค่า และ  $p(x) = ax^2 + bx + c$  ถ้า  $(p(x))^3 - x$  มี  $x^3 - 13x^2 + 44x - 32$  เป็นตัวประกอบ แล้ว  $a - 7b - 2c$  มีค่าเท่าใด
15. ให้  $A$  และ  $B$  เป็นจุดบนพาราโบลา  $y = 4x^2 + 7x - 1$  ที่มีจุด  $(0, 0)$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างสองจุดนี้ จงหาระยะห่างระหว่างจุด  $A$  และจุด  $B$
16. ให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง ซึ่ง  $ab \neq 1$  ถ้า  $a^2 + 12a + 3 = 0$  และ  $3b^2 + 12b + 1 = 0$  จงหาค่าของ  $\frac{ab + a + 1}{b}$
17. มีกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองกล่อง กล่องแรกมีพื้นที่ผิวทั้งหมดด้านรวมกันเท่ากับ 2 เท่าของปริมาตร กล่องที่สองมีความสูงเป็นครึ่งหนึ่งและมีความยาวฐานเป็นสองเท่าของกล่องแรก และมีพื้นที่ผิวทั้งหมดด้านของกล่องนี้รวมกันเท่ากับ 3 เท่าของปริมาตร จงหาปริมาตรของกล่องแรก
18. กรวยตรงอันหนึ่งมีฐานเป็นรูปวงกลมรัศมี 1 หน่วย และมีความสูง 3 หน่วยวัดจากยอดกรวยถึงจุดศูนย์กลางของฐาน กำหนดให้ รูปทรงสี่เหลี่ยมลูกบาศก์รูปหนึ่งถูกแนบอยู่ภายในกรวยตรงอันนี้พอดี (จุดมุมสี่มุมล่างของสี่เหลี่ยมลูกบาศก์อยู่บนฐานกรวยและจุดมุมสี่มุมบนของสี่เหลี่ยมลูกบาศก์นี้อยู่บนผิวข้างของกรวย) จงหาความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปทรงสี่เหลี่ยมลูกบาศก์นี้
19. กำหนดให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่  $AB = AC$  ให้  $D$  และ  $E$  เป็นจุดบนด้าน  $AB$  และ  $AC$  ตามลำดับ โดยที่  $\overline{DE}$  สัมผัสวงกลมแนบในสามเหลี่ยม  $ABC$  และขนานกับด้าน  $BC$  ถ้า  $DE = 20$  หน่วย และ  $BC = 52$  หน่วย จงหารัศมีของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม

20. กำหนดให้  $ABC$  และ  $ABD$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี  $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$  ดังรูป โดยมี  $AB = 4$ ,  $BC = 6$  และ  $AD = 8$  หน่วย ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด  $B$  ไปแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง  $AD$  ที่จุด  $L$  ถ้า  $AC$  ตัดกับ  $BD$  และ  $BL$  ที่จุด  $M$  และ  $N$  ตามลำดับ แล้ว จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม  $BMN$



21. กำหนด  $ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังรูป โดยมี  $E$  เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน  $AD$  และ  $\angle CEF = 90^\circ$  ให้  $\angle BCF = \alpha$  จงหาขนาดของ  $\angle DCE$  ในพจน์ของ  $\alpha$  (คำตอบต้องไม่อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ)



22. กำหนดให้  $\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่ง  $\angle B = 2\angle C$  และ  $BC = 2AB$  จงหา  $\angle A + \angle C$

23. ณ งานเลี้ยงหนึ่ง มีผู้ร่วมงานทั้งหมด 50 คน แต่ละคนได้รับหมายเลขตามลำดับการเข้างานตั้งแต่ 1 ถึง 50 ผู้ร่วมงานทักทายจับมือกันทั้งหมด 2 รอบ ดังนี้
- รอบที่ 1 คนที่มีหมายเลข  $i$  จับมือกับคนที่มีหมายเลข  $i+1$  สำหรับ  $i=1,2,3,\dots,49$  และคนที่ 50 จับกับคนที่ 1
- รอบที่ 2 คนที่มีหมายเลขคู่จับมือกับคนที่มีหมายเลขมากกว่าตัวเองทั้งหมดที่ยังไม่เคยจับมือกัน
- อยากทราบว่าในงานนี้จะมีการจับมือทักทายกันทั้งหมดกี่ครั้ง
24. พิจารณาดาวตารางขนาด  $4 \times 5$  ซึ่งมีทั้งหมด 20 ช่อง จงหาจำนวนวิธีในการเลือกช่อง 3 ช่อง จากตาราง โดยที่แต่ละช่องที่เลือกมาอยู่ต่างแถวและต่างหลักกันทั้งหมด
25. กำหนดให้  $a, b, c$  เป็นเลขโดด และจำนวน  $20ab13c$  เป็นจำนวนเต็มเจ็ดหลักที่หารด้วย 792 ลงตัว จงหาค่าของ  $a+b+c$
26. กำหนดให้  $p$  เป็นจำนวนจริง และ  $r_1, r_2$  เป็นรากทั้งสองของสมการ  $x^2 - 17x - 632 = p$  แล้วรากที่มีค่ามากที่สุดของสมการ  $(x - r_1)(x - r_2) + p + 2 = 0$  มีค่าเท่าใด
27. สำหรับจำนวนเต็มบวก  $n \geq 2$  ใดๆ นิยาม  $f(n)$  เป็นตัวประกอบที่ใหญ่ที่สุดของ  $n$  ที่ไม่ใช่ตัวมันเอง กำหนดให้  $a_1 = 2019^{2562}$  และ
- สำหรับจำนวนเต็มบวก  $n$  ใดๆ ซึ่ง  $a_n \geq 2$  เป็นจำนวนเต็มบวก นิยาม  $a_{n+1} = a_n - f(a_n)$
- ถ้า  $a_k$  คือพจน์แรกของลำดับนี้ที่มีค่าน้อยกว่า 2 แล้ว  $k$  มีค่าเท่าใด (หมายเหตุ 673 เป็นจำนวนเฉพาะ)
28. กบตัวหนึ่งต้องการกระโดดขึ้นบันได โดยกบสามารถกระโดดขึ้นบันไดได้ครั้งละ 1, 2 หรือ 3 ขั้นเท่านั้น (เช่น หากมีบันได 3 ขั้น กบตัวนี้จะมีวิธีการกระโดดขึ้นบันไดทั้งหมด 4 วิธี) ถ้าบันไดมี 7 ขั้น จงหาความน่าจะเป็นที่กบตัวนี้ไม่มีการกระโดดขึ้นบันไดครั้งละ 3 ขั้นเลย

29. ในห้องประชุมแห่งหนึ่งมีหลอดไฟ 2562 ดวง ซึ่งแต่ละดวงติดหมายเลข 1 ถึง 2562 และมีนักเรียน 2562 คน เข้าไปเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟ (ปิดหรือเปิด) ทีละคนตามลำดับ โดยนักเรียนแต่ละคนจะเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟทุกดวงที่ลำดับการเข้าของตนเองหารหมายเลขของหลอดไฟดวงนั้นลงตัว (เช่น นักเรียนลำดับที่ 2 จะเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟทุกดวงที่เป็นหมายเลขคู่) ถ้าในตอนเริ่มต้นหลอดไฟทุกดวงมีสถานะเป็นปิด จงหาจำนวนหลอดไฟที่เปิดอยู่หลังจากนักเรียนคนที่ 2562 เข้าไปเปลี่ยนสถานะของหลอดไฟเสร็จแล้ว
30. ฟ้าเล่นเกมทายวันเกิดของส้มในเดือนกันยายนซึ่งเป็นเดือนเกิดของส้มพอดี ถ้าฟ้าทายวันที่เกิดของส้มถูก ส้มจะให้ของขวัญกับฟ้า ซึ่งในเดือนกันยายน ส้มจะพูดจริงในวันที่ตรงกับเลขที่วันเกิดของเธอเท่านั้น และโกหกในวันอื่น ๆ ทั้งหมด โดยส้มพูดกับฟ้าในช่วง 3 วันที่ติดต่อกันในเดือนกันยายน ดังนี้
- วันแรก ส้มพูดว่า “ฉันพูดโกหกในวันที่ 7, 11, 14, 18, 20, 23, 26 และ 29”
  - วันต่อมา ส้มพูดว่า “วันนี้เป็นวันที่ 6, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 28 หรือ 29
  - และ วันสุดท้าย ส้มพูดว่า “ฉันพูดโกหกในวันที่ 5, 10, 13, 16, 17, 22, 25 และ 28”
- จากข้อมูลที่ให้มา วันเกิดของส้มคือวันที่เท่าไรในเดือนกันยายน